PART2　分数で表された数列の和

例題

次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

$$\frac{1}{1\cdot 3},\ \frac{1}{3\cdot 5},\ \frac{1}{5\cdot 7},\ \cdots\cdots$$

Point Pickup

練習

次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

$$\frac{1}{1\cdot 4},\ \frac{1}{4\cdot 7},\ \frac{1}{7\cdot 10},\ \cdots\cdots$$

第 3 講　PART2 確認問題

1　次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

$$\frac{1}{1\cdot5},\ \frac{1}{5\cdot9},\ \frac{1}{9\cdot13},\ \frac{1}{13\cdot17},\ \cdots\cdots$$

和 [ア]

[ア] は，次の①～④のうちから選べ。

① $\dfrac{n}{2n+3}$　　② $\dfrac{n}{4n+1}$

③ $\dfrac{4n}{4n+1}$　　④ $\dfrac{n-1}{4n-3}$

PART2　分数で表された数列の和

例題

次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

$$\frac{1}{1\cdot3},\ \frac{1}{3\cdot5},\ \frac{1}{5\cdot7},\ \cdots\cdots$$

この数列の第 n 項は

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

よって，求める和は

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2n+1)-1}{2n+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2n}{2n+1}=\frac{n}{2n+1}$$

練習

次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

$$\frac{1}{1\cdot4},\ \frac{1}{4\cdot7},\ \frac{1}{7\cdot10},\ \cdots\cdots$$

この数列の第 n 項は

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$$

よって，求める和は

$$\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\frac{1}{7\cdot10}+\cdots\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\cdots\cdots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{(3n+1)-1}{3n+1}=\frac{n}{3n+1}$$

第 3 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：②

[解説]

この数列の第 k 項は

$$\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4k-3}-\frac{1}{4k+1}\right) \quad \text{[A]}$$

よって，求める和は

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\frac{1}{13\cdot 17}+\cdots\cdots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{13}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{17}\right)+\cdots\cdots+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{17}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)\right\} \quad \text{[B]}$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{(4n+1)-1}{4n+1}=\boldsymbol{\frac{n}{4n+1}}$$

[A]　数列 1，5，9，13，…は初項 1，公差 4 の等差数列であり，第 m 項は $4m-3$ となる。

[B]　$\frac{1}{4}$ をくくり出すと，{　} の中の隣り合う項どうしで消し合い，最初の $\frac{1}{1}$ と最後の $-\frac{1}{4n+1}$ だけが残る。